5 Contraste de hipótesis y pruebas de ajuste

5.1 Estructura de un contraste

El objetivo de este tema es establecer un método para no rechazar o rechazar afirmaciones acerca del parámetro desconocido a partir de una muestra.

Una *hipótesis estadística* consiste en una hipótesis o suposición que especifica total (por ejemplo $m = k$) o parcialmente (por ejemplo, $p \geq 0,5$) la distribución de una variable aleatoria (población). A partir de ahí, el objetivo consiste en contrastar la validez de dicha hipótesis. Aceptar (no rechazar) o rechazar, es una decisión dicotómica Dicha decisión se tomará basándose en la información que proporciona la muestra, información que deberá ser tratada de la manera más eficiente.

El planteamiento general es el siguiente: Sea X una variable aleatoria (población) cuya distribución depende de algún(os) parámetro(s) desconocido(s), expresado por la función de distribución $F(X, \theta)$. Para establecer una hipótesis acerca de θ, debemos establecer previamente el espacio de las hipótesis θ, es decir, el conjunto de valores que puede(n) tomar θ. Este espacio de las hipótesis se dividirá en dos partes:

- H_0: la *hipótesis nula* es aquella que deseamos contrastar incorporando el signo de igualdad.
- H_a: la *hipótesis alternativa* es aquella que se plantea como oposición a la hipótesis nula.

Tras establecer las hipótesis nula y alternativa acerca del(os) parámetro(s) desconocido(s), debemos plantearnos el criterio en el que vamos a basar la decisión de aceptar (no rechazar) o rechazar las hipótesis. Con tal fin, construiremos la *región crítica* (RC). En este sentido, a partir de la muestra extraída de la población, seguiremos el siguiente principio:

- si $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin$ RC, aceptaremos (no rechazaremos) la hipótesis nula.
- si $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ RC, rechazaremos la hipótesis nula.

La región crítica se establecerá en cada caso concreto teniendo en cuenta las características específicas de cada población y del parámetro del que se desee efectuar el contraste.

La RC puede ser de dos tipos, dependiendo de la forma de las hipótesis:

1. *Unilateral o de una cola.* Cuando la hipótesis sea del tipo

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
$$H_a : \theta < \theta_0$$

Entonces, la RC tendrá la forma $(-\infty, k)$. Es decir, si el resultado que arrojan los datos es *demasiado pequeño* se rechaza la H_0.

Si la hipótesis es del tipo

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_a : \theta > \theta_0$$

Entonces, la RC tendrá la forma $(k, +\infty)$. Es decir, si el resultado que arrojan los datos es *demasiado grande* se rechaza la H_0.

2. *Bilateral o de dos colas.* Cuando la hipótesis sea del tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_a : \theta \neq \theta_0$$

Entonces, la RC tendrá la forma $(-\infty, k_1) \cup (k_2, +\infty)$. Es decir, si el resultado que arrojan los datos está *demasiado alejado* de lo esperado, bien por exceso bien por defecto, se rechaza la H_o.

5.2 Errores en los contrastes estadísticos y potencia

En un contraste estadístico, una vez planteadas las hipótesis, definida la RC, construido el estadístico, y una vez decidido si se acepta o rechaza la Ho, cabe la posibilidad de haber tomado la decisión equivocada, ya que los valores comprendidos en la región crítica también son resultados factibles del experimento muestral. Pero dichos errores son medibles y, por lo tanto,

debemos evaluarlos. Cuando establecemos la H_0 y la H_a, en realidad desconocemos cuál de ellas es cierta. Y nuestra decisión consistirá en aceptar o rechazar sin saber si realmente es cierta o no.

En un contraste estadístico cabe la posibilidad de haber tomado la decisión equivocada, ya que los valores comprendidos en la región crítica también son resultados factibles del experimento muestral. En base a que sea H_0 o H_a la cierta y en base a nuestra decisión, pueden concurrir 4 escenarios diferentes:

	H_0 cierta	H_a cierta
Rechazamos H_0	Error tipo I	✓
Aceptamos H_0	✓	Error tipo II

- La probabilidad de cometer el error tipo I se denota α se calcula de la siguiente manera

$$\alpha = P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}).$$

- La probabilidad de cometer el error tipo II se denota β se calcula de la siguiente manera

$$\beta = P(\text{Error tipo II}) = P(\text{Aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$$

- Se llama *potencia del contraste* a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0 siendo falsa $1 - \beta$.

Un contraste debería buscar simultáneamente el nivel de significación α más bajo posible y la potencia $1 - \beta$ más alta posible. Fijado el nivel de significación, se determina la región de rechazo cuya potencia es mayor entre todos los contrastes cuyo tamaño sea el fijado a priori.

La única posibilidad para conseguir que un contraste mejore su potencia $1 - \beta$, sin aumentar el nivel de significación α , es incrementar el tamaño de la muestra. Al aumentar el tamaño de la muestra, varía la ley de distribución del estadístico de contraste, y generalmente disminuye la varianza. Generalmente, las propiedades del contraste mejoran.

5.3 Procedimiento de cinco pasos para probar una hipótesis

A la hora de realizar un contraste de hipótesis, es muy importante seguir un procedimiento de cinco pasos que nos permite rechazar o no la hipótesis nula de una manera sistemática.

- **Paso 1.** Establecer hipótesis nula H_0 e hipótesis alternativa H_a.
- **Paso 2.** Seleccionar el nivel de significancia α.
- **Paso 3.** Elegir el estadístico adecuado para realizar el contraste.
- **Paso 4.** Formular la regla para tomar una decision con base a los tres pasos anteriores (región crítica).
- **Paso 5.** Tomar una muestra y se toma una decisión.

Una vez realizado este procedimiento, la decisión que podemos tomar es:

- No se rechaza H_0.
- Se rechaza H_0 y se acepta H_a.

Además, a la hora de hacer un contraste de hipótesis, es importante diferenciar entre una prueba de significancia de una cola y una de dos colas.

Ejemplo 5.3.1. Una compañía de fabricación de muebles introdujo hace un año un nuevo método de producción para cierto modelo de escritorio y la dirección de la empresa quiere saber si esto ha producido algún cambio en la producción media semanal. La producción semanal sigue una distribución normal y antes de realizar el cambio de método la producción media semanal era de 200 escritorios con una desviación estándar de 16. Sabemos que tras realizar el cambio en el método de producción la desviación estandar no ha cambiado.

Seguimos el procedimiento de 5 pasos que hemos descrito para responder a la pregunta de la dirección:

- **Paso 1.** Establecer hipótesis nula H_0 e hipótesis alternativa H_a. Recordad que la H_0 es la que tiene el signo de igualdad, así que en este caso la hipótesis nula es "la producción media semanal no ha cambiado". En consecuencia, la hipótesis alternativa es que "la producción media semanal sí que ha cambiado". Esto se expresa de la siguiente manera:

$$H_0\colon \mu = 200$$
$$H_a\colon \mu \neq 200$$

  Ésta es un *contraste de dos colas*, porque la hipótesis alternativa no indica una dirección. La dirección sólo quiere saber si la media ha cambiado.

- **Paso 2.** Seleccionar el nivel de significancia α. Los niveles de significancia más comunes son 0,05 (expresado normalmente como 5 %), nivel de 0,01, nivel de 0,10. El investigador debe elegir el nivel de significancia antes de formular una regla de decisión y recopilar los datos de la muestra.

  En este caso vamos a utilizar un nivel de significancia del $\alpha = 0{,}01$. Recordad que α es precisamente la probabilidad de cometer un error tipo I, la probabilidad de rechazar H_0 siendo verdadera.

- **Paso 3.** Elegir el estadístico adecuado para realizar el contraste. Como hemos visto en el tema anterior, el estadístico adecuado para estimar la media de una población normal con varianza conocida es

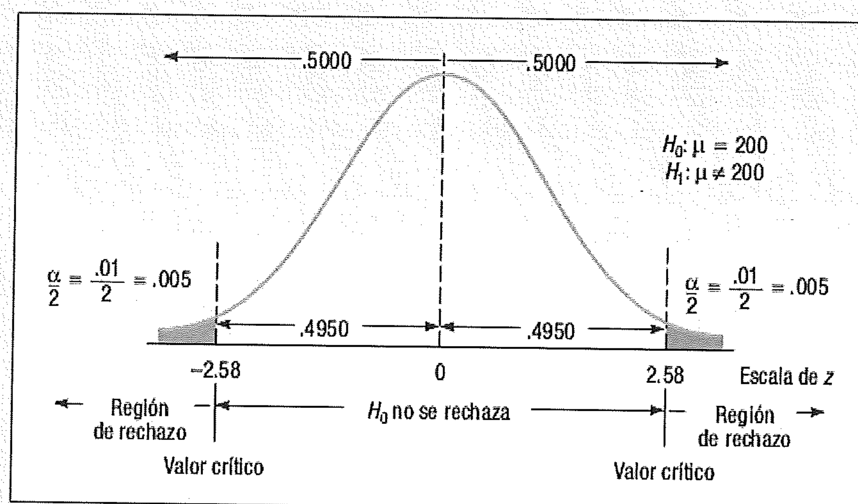
$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0, 1)$$

  donde

  - $\overline{X}$ es la media muestral.
  - μ es la media de la población.
  - σ es la desviación estándar de la población.
  - n es el tamaño de la muestra.

- **Paso 4.** Formular la regla para tomar una decision:

  Formulamos la regla de decisión buscando los valores críticos de z en la tabla de la distribución normal. Como se trata de un contraste de dos colas y la significancia es de 0,01, 0,005 corresponderá cada una de la colas. En la tabla tenemos las probabilidades acumuladas, por lo cual, para encontrar el valor crítico superior, debemos buscar el valor que deje una área bajo la curva normal de $1 - 0{,}005 = 0{,}995$. Se busca el valor más cercano a 0,995 en cuerpo de la tabla: 0,9951. Corresponde con el valor crítico 2,58. Como la distribución normal es simétrica, el valor crítico inferior será $-2{,}58$.



En consecuencia, la regla de decisión es:

- Rechazamos H_0 y se acepta H_a si el valor z calculado a partir de una muestra no se encuentra entre $-2{,}58$ y $2{,}58$.
- No se rechaza H_0 si el valor z se encuentra entre $-2{,}58$ y $2{,}58$.

- **Paso 5.** Tomar una muestra y se toma una decisión. Cogemos los datos de la último año. La fábrica estuvo abierta 50 semanas y la media semanal fue 203,5. Calculamos el valor z para la muestra:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{203{,}5 - 200}{16/\sqrt{50}} = 1{,}55.$$

Por lo tanto no rechazamos H_0, ya que 1,55 no cae en la RC. Es decir, concluimos que la producción media semanal no es distinta a 200 y por lo tanto el nuevo método de producción no ha alterado la tasa de producción. La pequeña diferencia entre la media del último año y la media anterior se puede atribuir a un error de muestreo.

5.4 Valor p de un contraste de hipótesis

En contrastes de hipótesis y en estadística general, el valor de p (a veces conocido simplemente como el p-valor o la p) se define como la probabilidad correspondiente al estadístico de ser posible bajo la hipótesis nula. Es decir, el valor p es el nivel de significación α más pequeño posible que se puede escoger, para el que todavía se rechazaría la hipótesis nula H_0 con la muestra actual.

- Los valores de p pueden indicar cómo son los datos de incompatibles con cierto modelo estadístico.
- Los valores de p no miden la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, ni tampoco la probabilidad de que los datos hayan sido producidos enteramente al azar.
- Conclusiones científicas y decisiones políticas o empresariales no deberían basarse únicamente en el hecho de que un valor de p supere un umbral especificado.
- Una inferencia apropiada implica un informe completo y transparencia.
- Ni el valor de p ni la significación estadística miden el tamaño de un efecto o la importancia de un resultado.
- En sí mismo, un valor de p no es una medida apropiada de la evidencia de un modelo o hipótesis.

Los valores p se pueden intrepretar de la siguiente manera:

- $p < 0{,}10 \rightarrow$ hay *cierta evidencia* de que H_0 no es verdadera.
- $p < 0{,}05 \rightarrow$ hay *evidencia fuerte* de que H_0 no es verdadera.
- $p < 0{,}01 \rightarrow$ hay *evidencia muy fuerte* de que H_0 no es verdadera.
- $p < 0{,}001 \rightarrow$ hay *evidencia extremadamente fuerte* de que H_0 no es verdadera.

Ejemplo 5.4.1. Continuando con el Ejemplo 5.3.1, recordamos que el la hipótesis nula no se rechazó por que el valor z de 1,55 no está en la RC. La probabilidad de hallar un valor z de 1,55 of mayor es de aproximadamente 0,0594. Este valor los calculamos buscando el valor 1,55 en la tabla de la normal. La probabilidad acumulada que corresponde con el valor más cercano, 1,56, es 0,9406. Esa es la probabilidad de que z tome el valor 1,56 o menor. Por lo tanto la probabilidad que buscamos es (aproximadamente) $1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$. En otras palabras, hay una probabilidad de 0,0594 de que si la media poblacional μ es 200 y tomamos una muestra, la media muestral sea mayor o igual a 203,5.

Por lo tanto, el valor *p de dos colas* es el doble de 0,0594, es decir, 0,1188, el cual es mayor que el nivel de significancia 0,01 que habíamos fijado. En consecuencia, no rechazamos H_0.

5.5 Contrastes de la media

5.5.1 V.a. normal con varianza conocida

Bilateral

Sea una población con una distribución normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, cuya varianza σ^2 es conocida. Tomamos una muestra, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de dicha población al objeto de contrastar la siguiente hipótesis acerca de μ:

- $H_0\colon \mu = \mu_0$
- $Ha\colon \mu \neq \mu_0$

La forma más intuitiva de contrastar las hipótesis es la siguiente. Por el capítulo anterior sabemos que la verdadera media μ estará en el intervalo de confianza $1-\alpha$, con una probabilidad $1-\alpha$. Y no lo estará con probabilidad α. Luego, si la H_0 ($\mu = \mu_0$) es cierta, mu_o estará fuera de dicho intervalo con probabilidad α. Luego, si aceptásemos la H_0 en el caso de que el valor μ_0 estuviese en el intervalo de confianza, α sería el nivel de significación del contraste. Resumiendo, la decisión basada en el *intervalo de confianza* sería:

- si $m_0 \in I_{1-\alpha}$ no rechazamos (aceptamos) H_0;
- si $m_0 \notin I_{1-\alpha}$ rechazamos H_0.

Este sistema nos permite llegar de forma sencilla a la forma de efectuar el contraste utilizando la región crítica.

Por la forma de las hipótesis, la RC debe tener la forma $(-\infty, k_1) \cup (k_2, +\infty)$. Para obtener esos dos valores k_1 y k_2 partimos de la condición de rechazo de H_0:

$$\mu_0 \notin I_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Es decir,

$$\mu_0 < \overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{o bien} \quad \mu_0 > \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Reordenando las expresiones, tenemos:

$$\overline{X} < \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{o bien} \quad \overline{X} > \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Esto significa que cuando la media muestral cumple alguna de esas inecuaciones (condiciones) rechazamos H_0. Luego:

$$\text{RC} = \left(-\infty, \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \cup \left(\mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$

Tenemos, por lo tanto una segunda vía para realizar el contraste, siguiendo el *criterio de la región crítica*, que será:

- si $\overline{X} \in \text{RC}$ rechazaremos H_0;
- si $\overline{X} \notin \text{RC}$ no rechazaremos (aceptaremos) H_0.

Pero si reordenamos de nuevo las inecuaciones, podemos presentar una tercera vía para realizar contrastes, la que se basa en el estadístico del caso en el que nos encontremos. De las condiciones

$$\overline{X} < \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{o bien} \quad \overline{X} > \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

pasamos a

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{o bien} \quad \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Es decir,

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \notin \left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Así, la decisión se toma de la siguiente manera:

- si el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \notin \left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ rechazaremos H_0;
- si el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in \left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ no rechazaremos (aceptaremos) H_0;

Unilateral

Si el contraste que se desea efectuar fuese el de la siguiente hipótesis,

- $H_0\colon \mu \geq \mu_0$
- $Ha\colon \mu < \mu_0$,

podríamos acudir al sistema del contraste basado en el *estadístico* (o fórmula). La lógica exige (fijándonos en las hipótesis) que rechazaremos cuando el resultado sea corto (valor pequeño) y aceptando cuando sea grande. Es decir (fijaos en el cuantil!),

- si el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ rechazaremos H_0;
- si el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_\alpha$ no rechazaremos (aceptaremos) H_0.

Si reordenamos esas dos condiciones, encontraríamos el sistema para hacer el contraste basándonos en la región crítica. En concreto:

- si el estadístico $\overline{X} < \mu_\alpha - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = k$ rechazaremos H_0;
- si el estadístico $\overline{X} > \mu_\alpha - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = k$no rechazaremos (aceptaremos) H_0.

Así que

$$\mathrm{RC} = \left(-\infty, \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

En este contraste, por ser unilateral, no se puede utilizar el intervalo de confianza, ya que este rechaza resultados alejados de las hipótesis tanto por exceso como por defecto.

Por último, si la hipótesis fuera

- H_0: $\mu \leq \mu_0$
- Ha: $\mu > \mu_0$,

la región crítica sería

$$\mathrm{RC} = \left(\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$

Y para el contraste basado en el estadístico, el cuantil que establece el límite de aceptabilidad es z_α (en lugar de $-z_\alpha$).

5.5.2 V.a. normal y varianza desconocida

En este caso sabemos que

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Teniendo en cuenta esto podemos efectuar el contraste de cualquier hipótesis.

Bilateral

Si la hipótesis es

- $H_0\colon \mu = \mu_0$,
- $Ha\colon \mu \neq \mu_0$,

la regla sería

- si el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \notin \left(-t_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}, t_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}\right)$ rechazaremos H_0;
- si el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \in \left(-t_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}, t_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}\right)$ no rechazaremos (aceptar) H_0;

o, equivalentemente, en terminos de la región crítica, tenemos

- si $\overline{X} \in$ RC rechazaremos H_0;
- si $\overline{X} \notin$ RC no rechazaremos (aceptaremos) H_0.

donde

$$\mathrm{RC} = \left(-\infty, \mu_0 - t_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \cup \left(\mu_0 + t_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$

Unilateral

Si la hipótesis es

- $H_0\colon \mu \geq \mu_0$,
- $Ha\colon \mu < \mu_0$,

el criterio sería el mismo, pero la regíon crítica es

$$\mathrm{RC} = \left(-\infty, \mu_0 - t_{(n-1);\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

Si la hipótesis es

- $H_0\colon \mu \leq \mu_0$,
- $Ha\colon \mu > \mu_0$,

el criterio sería el mismo, pero la regíon crítica es

$$\text{RC} = \left(t_{(n-1);\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty \right).$$

Ejemplo 5.5.1. Para contrastar que una empresa de productos lácteos vende un litro en sus cajas, comprobamos 25 envases y obtenemos que la media es 990 mililitros y la desviación típica es de 15 mililitros. Suponiendo que el contenido de cada envase sigue una distribución normal, ¿qué decidiremos con $\alpha = 5\,\%$?¿Es una “estafa”?

La hipótesis que queremos contrastar es:

- H_0: $\mu \geq 1000$,
- Ha: $\mu < 1000$,

Como el nivel de significancia está ya fijado en el enunciado, pasamos a elegir el estadístico. Como acabamos de ver, la región crítica es

$$\begin{aligned}\text{RC} &= \left(-\infty, \mu_0 - t_{(n-1);\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \left(-\infty, 1000 - 1{,}711 \cdot \frac{15}{\sqrt{25}} \right) \\ &= (-\infty, 994.)687.\end{aligned}$$

Debemos establecer ahora la regla de decisión: rechazaremos H_0 si la media de la muestra no está en RC y no rechazaremos H_0 si ocurre lo contrario.

Y como la media muestral, 990, es menor que 994,687, tenemos que $\overline{X} \notin$ RC. La decisión sería rechazar que nos venden un litro. Aceptaríamos la H_a, es decir, que nos venden menos de un litro en sus envases.

Si hubieramos utilizado el estadístico directamente para definir la regla de decisión, tendríamos que

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{25}} = -3{,}333 < -1{,}711.$$

Por lo tanto rechazamos H_0.

5.5.3 V.a. no normal, varianza conocida y $n \geq 30$

Análogamente al capítulo anterior, aunque la variable no es normal, debido al tamaño de la muestra, podemos aplicar el teorema central del límite, con lo que podremos considerar que *aproximadamente*:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \right).$$

Por lo que nos remitimos al escenario de la sección 5.5.1 (variable poblacional normal y varianza conocida) que ya hemos visto y podemos efectuar los contrastes con el mismo planteamiento que en ese caso.

5.5.4 V.a. no normal, varianza desconocida y $n \geq 10$

En este caso también, aunque la variable no sea normal, debido al tamaño de la muestra, podemos aplicar el teorema central del límite, con lo que podremos considerar que aproximadamente:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\right).$$

Volvemos a estar de nuevo en el caso de la sección 5.5.1.

5.6 Contrastes de la diferencia de las medias de dos poblaciones

5.6.1 Vv.aa. normales con varianza conocidas

Sean dos poblaciones independientes con una distribución normal, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, cuyas varianzas son conocidas. Tomamos una muestra de cada una, $(X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$ e $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2})$. Tal y como vimos en el capítulo anterior, en estas circunstancias sabemos que el estadístico adecuado es:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Con lo que, tipificando la variable, tendremos:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

Bilateral

Si quisiéramos contrastar, con un nivel de significación α, la hipótesis

- $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 = 0,$
- $Ha \colon \mu_1 \neq \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 \neq 0,$

tendremos varias formas de hacerlo.

Utilizando el estadístico, la regla de decisión sería:

- Si el estadístico
$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \notin (-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$$
rechazaremos H_0.

- Si el estadístico
$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \in (-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$$
no rechazaremos (aceptaremos) H_0.

Utilizando la región crítica, tendríamos como RC:

$$\mathrm{RC} = \left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, +\infty\right).$$

Lo que nos conduce a rechazar H_0 si $\overline{X}-\overline{Y} \in \mathrm{RC}$ y a no rechazarla si $\overline{X}-\overline{Y} \notin \mathrm{RC}$.

Por último, podemos utilizar el intervalo de confianza:

- Si 0 pertenece al intervalo de confianza no rechazaremos H_0,
- Si 0 no pertenece al intervalo de confianza rechazaremos H_0.

Unilateral

Si tuviéramos que contrastar, con el mismo nivel de significación α, la siguiente hipótesis:

- $H_0\colon \mu_1 \leq \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 \leq 0$,
- $H_a\colon \mu_1 > \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 > 0$,

tendríamos dos opciones. O bien acudimos directamente al estadístico, de forma que (*cuidado* con el orden en que se efectua la diferencia de medias muestrales y con el cuantil, que ya no es $\frac{\alpha}{2}$):

- Si el estadístico
$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$$
rechazaremos H_0,

- Si el estadistico
$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_\alpha$$
no rechazaremos (aceptaremos) H_0.

O bien acudimos a la región crítica:
$$\mathrm{RC} = \left(z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, +\infty \right).$$

Por tanto rechazaríamos H_0 si $\overline{X}-\overline{Y} \in \mathrm{RC}$ y no la rechazaríamos en el caso contrario.

En el caso de la hipótesis unilateral dual, se establecería la regla de decisión de manera simétrica.

Ejemplo 5.6.1. Se desea contrastar si dos tratamientos para el agua, A y B, producen iguales velocidades de sedimentación. Se toman dos muestras aleatorias simples: A se experimenta 20 veces y B 40 veces. Si aceptamos que la velocidad de sedimentación sigue una distribución normal, donde las varianzas de A y B son, respectivamente, 0,28 y 0,31, efectuar el contraste con un nivel de significación del 5 % (media muestral de X: 22,91; media muestral de Y: 23,12)

Las hipótesis en este caso serán,

- $H_0\colon \mu_1 = \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 = 0$,
- $Ha\colon \mu_1 \neq \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

Si utilizásemos el intervalo de confianza:
$$\begin{aligned} I_{1-\alpha} &= \left(\overline{X}-\overline{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) \\ &= \left(22{,}92 + 23{,}12 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28}{20}+\frac{0{,}31}{40}} \right). \end{aligned}$$

Como $0 \in (-0{,}499, 0{,}079)$ no rechazamos la hipótesis nula H_0. Es decir, aceptamos que ambos tratamientos tienen igual velocidad de sedimentación. O bien, que las diferencias aparecidas en las muestras de ambos métodos no resultan significativas.

Si queremos utilizar la regíon crítica:

$$\mathrm{RC} = \left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, +\infty\right)$$
$$= \left(-\infty, -1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28}{20} + \frac{0{,}31}{40}}\right) \cup \left(1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28}{20} + \frac{0{,}31}{40}}, +\infty\right).$$

Como la diferencia de medias muestrales es 0,21 (o bien -0,21), y este valor no se halla en la RC, aceptaríamos la H_0.

Si hacemos uso directo del estadístico, tenemos

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{22{,}91 - 23{,}12}{\sqrt{\frac{0{,}28}{20} + \frac{0{,}31}{40}}} = -1{,}42 \in (-1{,}96, 1{,}96) = (-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}).$$

Por lo tanto, no rechazamos H_0.

5.6.2 Vv.aa. normales con varianza desconocidas

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ son dos variable aleatorias normales cuyas varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas, pero somos capaces de establecer que son iguales, entonces podremos, tal y como ocurría en el capítulo anterior, utilizar el estadístico:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}.$$

Tal y como hemos hecho en los casos anteriores, podemos contrastar cualquier hipótesis basándonos en este estadístico.

Ejemplo 5.6.2. Un agricultor quiere contrastar el rendimiento de dos tipos de tomate. Para ello planta 10 semillas del tipo 1 y 7 del tipo 2 con los siguientes resultados

$$\overline{X} = 15, \quad S_1 = 2, \quad \overline{Y} = 10, \quad S_2 = 3.$$

Suponiendo que el peso sigue una distribución normal con varianzas iguales, ¿tienen lo dos tipos de tomate el mismo rendimiento con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}10$?

Las hipótesis a contrastar son las siguientes:

- H_0: $\mu_1 = \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 = 0$,

- Ha: $\mu_1 \neq \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.

Aceptando la igualdad de varianzas de ambos tipos de tomateras, si construimos el intervalo de confianza $1-\alpha$:

$$I_{1-\alpha} = \left(\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{(n_1+n_2-2);\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)$$
$$= \left(15 - 10 \pm 1{,}754\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{7}}\sqrt{\frac{9\cdot 2^2+6\cdot 3^2}{10+7-2}}\right)$$
$$= (2{,}88271, 7{,}11729).$$

Dado que $0 \notin (2{,}88271, 7{,}11729)$, rechazamos H_0. Por tanto, las plantas no rinden igual. De hecho, las tomateras de tipo 1 rinden más.

En este caso la región crítica sería:

$$\text{RC} = (-\infty, 2{,}88271) \cup (7{,}11729, +\infty).$$

5.6.3 Vv.aa. no normales, varianza conocidas y $n_1, n_2 \geq 30$

Análogamente al capítulo anterior, aunque la variable no es normal, debido al tamaño de la muestra, podemos aplicar el teorema central del límite, con lo que podremos considerar que aproximadamente:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Por lo que nos remitimos al escenario de la sección 5.6.1 (variables poblacionales normales y varianzas conocidas) que ya hemos visto y podemos efectuar los contrastes con el mismo planteamiento que en ese caso.

5.6.4 Vv.aa. no normales, varianza desconocidas y $n_1, n_2 \geq 100$

De nuevo, análogamente al capítulo anterior, aunque la variable no es normal, debido al tamaño de la muestra, podemos aplicar el teorema central del límite, con lo que podremos considerar que aproximadamente:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)$$

Por lo que nos remitimos al escenario de la sección 5.6.1 (variables poblacionales normales y varianzas conocidas) que ya hemos visto y podemos efectuar los contrastes con el mismo planteamiento que en ese caso.

5.6.5 Ejercicios: Contrastes de medias y diferencias de medias

1. En un determinado instituto aseguran que las notas obtenidas por sus alumnos en las pruebas de acceso a la Universidad tienen una media igual o superior a 7 puntos. Pero la media obtenida en una muestra aleatoria de 80 alumnos en los últimos exámenes fue de 6,89 puntos. Si sabemos que la varianza es igual a 4,84, ¿podemos considerar, con un nivel de significación del 1 %, que la afirmación hecha por el instituto es cierta?

2. En una determinada región, el número semanal de accidentes de tráfico producido durante el año pasado siguió una distribución normal de media 3,2 y desviación típica 1,3. Se ha llevado a cabo una campaña de prevención contra los accidentes de tráfico y la media semanal de accidentes en las 40 semanas siguientes ha sido de 3,05. Admitiendo que la desviación típica no ha variado, ¿podemos afirmar, con un nivel de significación del 5 %, que la campaña no ha tenido éxito (es decir, que el número de accidentes no ha disminuido con respecto al año anterior)?

3. Un fabricante garantiza a un laboratorio farmacéutico que sus máquinas producen comprimidos con un diámetro de 25 mm. Una muestra de 100 comprimidos dio como media de los diámetros 25,18 mm y desviación típica 0,89 mm. Se desea contrastar, con un nivel de significación del 5 %, si el diámetro medio que afirma el fabricante es correcto. Para ello:

   a) Plantea la hipótesis nula y la hipótesis alternativa del contraste.

   b) Realiza el contraste al nivel de significación indicado.

4. En un contraste de hipótesis para comprobar si la media de edad de los asistentes a una exposición era de 20 años, hemos seleccionado una muestra aleatoria de 100 asistentes, obteniendo una media de 20,5 años. La zona de aceptación obtenida ha sido el intervalo $(19{,}59, 20{,}41)$ y sabemos que la desviación típica es $\sigma = 2{,}1$. Por tanto, hemos rechazado la hipótesis. ¿Cómo se llama la probabilidad de habernos equivocado es la decisión, es decir, de haber rechazado la hipótesis, cuando en realidad era cierta? ¿Influye el tamaño de la muestra en la probabilidad de cometer este tipo de error?

5. La nota media en unas oposiciones celebradas el año pasado fue de 4,35 con una desviación típica de 2,5 puntos. Este año se han vuelto a convocar unas oposiciones similares. Con un nivel de significación

de 0,01, y suponiendo que la desviación típica sigue siendo la misma, queremos contrastar la hipótesis de que la media no ha variado. Para ello, vamos a extraer una muestra aleatoria de 100 exámenes. Así, la zona de aceptación será el intervalo $(3{,}71, 4{,}99)$. Si al final la media real fuera de 3 puntos y hubiéramos aceptado H_0 (siendo falsa), ¿qué tipo de error habríamos cometido? ¿Cómo influye el tamaño de la muestra en la probabilidad de cometer este tipo de error? ¿Cuál la probabilidad de cometer ese tipo de error?

6. Una empresa ubicada en Madrid tiene dos conductores para trasladar a los empleados a Segovia. Los conductores deben anotar la duración de cada trayecto. En una muestra aleatoria simple de 50 partes de incidencias por conductor, el conductor A registra un tiempo medio de trayecto de 62,30 minutos con una desviación típica de 10,325 minutos, mientras que el conductor B tiene un tiempo medio de trayecto de 60,02 minutos con una desviación típica de 8,625 minutos. El tiempo medio empleado por el conductor A en el trayecto sigue una distribución normal $N(\mu_1, 9)$ y el empleado por el conductor B se distribuye según una distribución normal $N(\mu_2, 8)$. Contrasta con un nivel de significancia del 5 % si hay diferencias en el tiempo medio de trayecto de los dos conductores.

7. Una empresa que se dedica a fabricar zapatillas de deporte dispone de dos proveedores de suelas de goma. Para analizar el desgaste de las suelas se ha tomado una muestra al azar de cada proveedor, obteniéndose los siguientes resultados:

$$n_1 = 10, \quad \overline{X} = 0{,}6, \quad S_1^2 = 0{,}068;$$
$$n_2 = 14, \quad \overline{Y} = 0{,}62, \quad S_2^2 = 0{,}054.$$

Suponiendo que el desgaste de las suelas sigue una distribución normal y las varianzas poblacionales son iguales, ¿se puede decir, para un nivel de confianza del 95 %, que ambos proveedores proporcionan un producto de semejante resistencia media al desgaste?

8. En un informa presentado por un reportero a una revista feminista se afirma que el número medio de horas semanales de conexión a Internet es el mismo para hombres que para mujeres. Sin embargo no parece prudente publicar estos datos sin contrastarlos estadísticamente. Se selecciona para ello una muestra de 75 hombres y 50 mujeres. Los resultados muestrales son los siguientes:

$$n_1 = 50 \quad \overline{X} = 5{,}34;$$
$$n_2 = 75, \quad \overline{Y} = 7{,}42.$$

Suponiendo que las varianza poblacionales son $\sigma_1^2 = 0{,}068$ y $\sigma_2^2 = 9{,}08$:

a) Formula el contraste a realizar y señalar los supuestos que se deben realizar para resolver el ejercicio.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) Calcula el estadístico del contraste.

d) ¿Existe evidencia para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significación del 5

5.7 Contraste de la varianza

5.7.1 Variable normal

Si $X \in N(\mu_1, \sigma^2)$ y queremos realizar contrastes relateivos a σ^2, utilizaremos el estadístico:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Bilateral

En concreto, si deseásemos contrastar que la varianza es determinado valor σ_0^2:

- $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$,
- $Ha\colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Podríamos utilizar el intervalo de confianza, que en este marco era:

$$I_{1-\alpha} = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),1-\frac{\alpha}{2}}} \right).$$

Y si el valor σ_0^2 pertenece al intervalo aceptaríamos H_0, y si no perteneciese la rechazaríamos.

Si quisiésemos efectuarlo utilizando la región crítica, suponiendo que H_0 es cierta, podríamos reordenar las condiciones implícitas en la decisión anterior y obtener:

$$\text{RC} = \left(-\infty, \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} \right) \cup \left(\frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}, +\infty \right)$$

Con lo que si tomamos una muestra y la varianza muestral S^2 pertenece a RC rechazaríamos H_0, y si no pertenece aceptaríamos H_0.